

# АЛГОРИТМ ГРУППИРОВКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ АВТОМАТИЧЕСКОМ РАСКРОЕ ЛИСТОВОГО МАТЕРИАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФОРМЫ\*

М. А. ЧЕРТОВ, Г. Е. РУДЕНСКИЙ, С. Г. ПСАХЬЕ

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,  
Томск, Россия*

e-mail: maks@ispms.tsc.ru, rudenski@ms.tsc.ru, sp@ms.tsc.ru

А. В. СКВОРЦОВ

*Томский государственный университет, Россия*

e-mail: skv@indorsoft.ru

An important problem during automatic calculation of nesting plans is the selection of parts orientations. The widely used selection of orientation from the specified list can result in decreased nesting quality. A clusterization algorithm is suggested, which uses the analysis of local geometrical characteristics of details for orientation selection.

## Введение

Задача автоматического построения оптимальных карт раскроя имеет большое прикладное значение, а также представляет значительный интерес с научной точки зрения. Практическая ценность решения этой проблемы обусловлена постоянной потребностью сократить временные затраты и количество отходов при раскрое листового материала на заготовки, что важно для снижения издержек в таких отраслях промышленности, как машиностроение и металлообработка, текстильное, кожевенное производство и др. В изучении задачи оптимального размещения геометрических объектов можно выделить два тесно связанных друг с другом направления. Первое можно определить как создание и развитие формального математического аппарата и построение единых подходов к решению данного класса задач [1, 2]. Второе направление заключается в разработке практических моделей и оптимизационных методов для построения оптимальных размещений в конкретных случаях. Хорошо проработанным с математической точки зрения и широко приме-

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований — Обь (грант № 05-01-98007) и Фонда содействия отечественной науке в рамках программы “Лучшие аспиранты РАН”.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

няемым на практике можно считать частный случай размещения деталей прямоугольной формы на прямоугольных заготовках. Можно упомянуть ряд фундаментальных работ отечественной школы раскроя-упаковки, в которых для решения этой задачи используются методы линейного программирования [3, 4], разработаны детерминированные алгоритмы “перестройки” упаковки [4, 5], методы динамического перебора [6]. Данные методы имеют различную трудоемкость, которая может быстро расти с увеличением размерности задачи, и тем не менее не гарантируют нахождения глобального оптимума. Несмотря на то, что аппроксимация деталей сложной формы прямоугольными объектами является очень грубым приближением, программы автоматического раскроя прямоугольников широко применяются на практике для размещения как прямоугольников, так и аппроксимированных деталей.

Оптимальное размещение объектов произвольной формы является значительно более сложной и востребованной задачей. Очень часто ее решение разбивают на две составляющие. Первая из них — это построение карт раскроя с использованием определенных эвристических моделей, например в соответствии с “жадной” стратегией раскроя. При этом одним из основных ориентиров при формулировке правил размещения служит стремление имитировать “ручной раскрой”. Входными параметрами такой задачи служат заданная последовательность размещения деталей и их ориентации. Вторая составляющая — оптимизационная, она заключается в поиске последовательности размещения, обеспечивающей минимальный отход. С математической точки зрения это эквивалентно построению локального минимума и поиску глобального экстремума функции многих переменных в дискретном пространстве, где переменными являются последовательность размещения и ориентации деталей, а целевой функцией — площадь отходов. Для глобальной оптимизации используются стохастические методы, такие как генетические алгоритмы [7] и метод сужающихся окрестностей [8]. Также существуют подходы, где оптимизационная часть и размещение деталей совмещены, наиболее характерным примером является имитация отжига [9].

Наличие эффективного алгоритма детерминированного последовательного размещения является ключевым моментом при автоматическом построении карт раскроя. Этот алгоритм должен одновременно удовлетворять ряду требований. Необходима высокая скорость расчета одной карты раскроя, чтобы иметь возможность детально исследовать пространство целевой функции в ходе глобальной оптимизации. В то же время необходимо достижение высокой плотности размещения, поэтому надо с осторожностью относиться к точности аппроксимации размещаемых объектов, чтобы не исключить возможность достижения минимума целевой функции, близкого к глобальному.

Одна из самых сложных при автоматическом размещении деталей — это проблема выбора ориентаций. Чаще всего используется подход, при котором каждой детали назначается заранее заданный набор фиксированных ориентаций. Как правило, это приводит к критической зависимости качества раскроя от выбранного набора ориентаций, при этом многое зависит от искусства оператора. Неоправданное расширение набора ориентаций приводит к недопустимому замедлению расчета. В работе [10] предлагается осуществлять выбор ориентации в ходе раскроя на основе локального анализа геометрии размещаемой детали и границы незанятого пространства на заготовке. Выбор ориентации осуществляется исходя из наилучшего совмещения выпуклых и вогнутых последовательностей ребер в ограничивающих контурах деталей и незанятого пространства. К сожалению, предложенный в [10] метод требует рассмотрения слишком большого количества совмещаемых комбинаций и дополнительной аппроксимации деталей с увеличенным допуском. В ре-

зультате такой алгоритм одиночно-последовательного размещения становится недопустимо медленным.

В данной работе предлагается использовать локальный анализ геометрии на предварительной стадии алгоритма размещения — при кластеризации деталей в группы. Поскольку кластеризация проводится однократно на стадии подготовки к расчету, жесткие ограничения по времени счета снимаются и перебор возможных комбинаций совмещаемых деталей можно сделать более полным. Как показывает опыт использования разработанного авторами программного комплекса “Nesting Intelligent Software”, объединение деталей в группы является очень полезным приемом, это позволяет одновременно как ускорить расчет вследствие уменьшения общего числа обрабатываемых объектов, так и повысить качество раскроя. При этом использовалась только кластеризация деталей одного сорта при одной фиксированной ориентации. Возможность объединения разнородных деталей и поиска наиболее подходящей ориентации позволяет рассчитывать на дальнейшее улучшение качества размещения.

## 1. Последовательное размещение

Авторами разработан оригинальный алгоритм детерминированного размещения, основанный на “жадной” стратегии, которая подразумевает, что после выбора положения каждого отдельного объекта невозможен возврат с целью улучшения качества всей конфигурации. Процедура размещения носит псевдопострочный характер, т.е. при расчете координат каждой последующей детали предпочтение отдается сначала самому нижнему, затем самому левому положению. При этом отклонения от построчного размещения могут сильно усиливаться в случае деталей с большим разбросом размеров или деталей со сложной геометрией. При вычислении координат местоположения деталей используется оригинальный способ полосовой целочисленной аппроксимации их формы, что позволяет выполнять быстрое и достаточно точное определение координат. Во многом схожий способ аппроксимации, использующий предположение о монотонности границ деталей, был независимо предложен другими авторами [11, 12]. После размещения детали на основе аппроксимированной геометрии выполняется расчет уточняющего сдвига на основе исходной формы деталей, позволяющего дополнительно улучшить плотность раскроя. Ориентация детали при размещении выбирается на основе перебора с ограничениями из конечного дискретного набора заранее заданных допустимых значений ориентаций. Для этого осуществляется пробное размещение деталей в каждой из возможных ориентаций, затем на основе комбинации эмпирических критериев проводится сравнение допустимых размещений.

Таким образом, внешним управляющим параметром для алгоритма одиночно-последовательного размещения является только последовательность, в которой должны располагаться детали, а выбор одной из дискретных ориентаций происходит автоматически. Поиск наилучшей последовательности размещения может осуществляться в рамках внешнего оптимизационного алгоритма. Одним из возможных вариантов выбора последовательности является размещение по убыванию площади детали.

Одно из важных преимуществ разработанного алгоритма — его универсальность. Каждая стадия его разработки проводилась с учетом необходимости размещения двумерных объектов произвольной формы, в частности, допускается размещение объектов с немонотонными границами, многосвязных объектов, возможно вложенное размещение. В используемом алгоритме отсутствуют какие-либо упрощающие предположения, связанные с

предпочтением отдельных типов деталей либо иных особенностей, связанных с областью применения данного метода (текстильное производство или металлообработка и т. д.). В связи с этим предложенный алгоритм может быть адаптирован для использования в различных производственных областях.

На основе описанного алгоритма авторами разработан программный продукт “Nesting Intelligent Software” (рис. 1), который демонстрирует высокие показатели эффективности. Наиболее детальное сравнение было проведено с демоверсией программы “NestLib” индийской компании Geometric Software Solutions, которое показало приблизительно равное соотношение как по скорости счета, так и по качеству размещения. Сравнение с программным продуктом “Интех-РАСКРОЙ W/L”, совместной разработкой компаний Интех и Винтех, показало превосходство “Nesting Intelligent Software” по обоим показателям.

Одним из приемов помимо использования эффективной аппроксимации граничных контуров объектов, позволяющих получить высокое качество размещения, является объединение деталей в группы, или кластеризация. В настоящее время используется автоматическая группировка, при которой объединяются деталь и ее точная копия, развернутая на 180 град. (рис. 1, б), при этом варьируется только направление, по которому происхо-

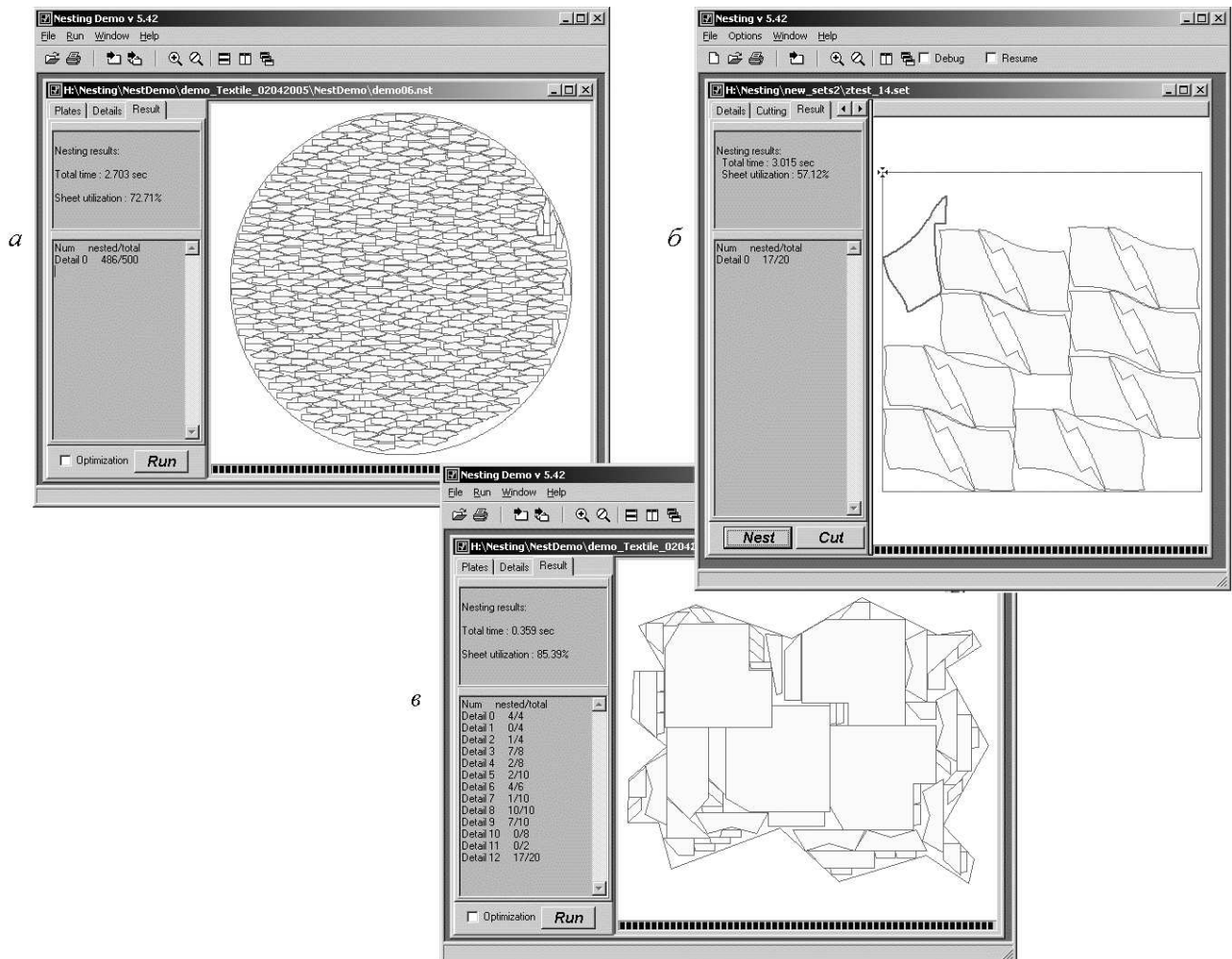


Рис. 1. Примеры работы программного продукта “Nesting Intelligent Software”: размещение большого количества однотипных деталей (а), размещение группированных в пары объектов (б), размещение разнотипных деталей с произвольной геометрией на пластине сложной формы (в).

дит совмещение объектов. Как показывает опыт, даже такой достаточно простой способ группировки позволяет получить заметное улучшение как в качестве раскроя, так и в скорости расчета. Поэтому улучшение алгоритма группировки перспективно с точки зрения повышения общей эффективности алгоритма автоматического размещения.

## 2. Локальные характеристики формы

Теоретически каждая из рассматриваемых деталей может быть размещена в бесконечное количество положений и ориентаций. На практике чаще всего используется перебор конечного числа заранее заданных оператором ориентаций. Чтобы реализовать автоматический выбор ориентаций вне зависимости от искусства оператора при выборе списка разрешенных поворотов, необходимо реализовать алгоритм анализа геометрии размещаемых объектов, основанный, например, на анализе локальных характеристик формы деталей.

В работе [10] предлагается в качестве локальных характеристик формы использовать сегменты ограничивающих контуров, состоящие из трех последовательных ребер, образующих два внутренних угла. Рассматривается локальное совмещение пары таких сегментов, один из которых выпуклый (оба угла между ребрами  $> 180^\circ$ ), а другой — вогнутый (оба угла между ребрами  $< 180^\circ$ ). В результате количество возможных вариантов сокращается за счет подбора совмещаемых локальных элементов контура с наилучшим совпадением формы. После того как совмещаемая пара выбрана, локальные характеристики формы далее используются для определения положения и ориентации объекта. Таким образом, как выбор, так и размещение деталей основаны на использовании локального анализа геометрии контуров.

Сначала более детально рассмотрим совмещение локальных элементов формы, так как это позволяет лучше прояснить особенности обеих задач. При совмещении каждой пары среди доступных комбинаций возможны три различные ориентации, определяемые совмещением одного из трех ребер выпуклого локального элемента с соответствующим ребром вогнутого элемента. Такие ребра можно называть базовыми ребрами совмещения.

После того как выбраны базовые стороны совмещения, уточняется конкретный способ их стыковки. На рис. 2 показано шесть возможных типов стыковки, когда привязка происходит по центральному ребру. Каждый тип стыковки определяет максимальное расстояние, на которое выпуклый элемент может быть вдвинут внутрь вогнутого. Целью является обеспечить максимально плотное совмещение без пересечений между локально анализируемыми элементами формы. Для каждого типа стыковки можно записать систему линейных уравнений, определяющих взаимное положение элементов при плотном совмещении. Соответствующая система для правого верхнего типа стыковки на рис. 2 вместе с обозначениями представлена на рис. 3. Неизвестными величинами являются пунктирные отрезки на боковых ребрах элементов, отсекаемые точками касания, длины которых отмечены апострофом, индексы  $P$  означают принадлежность к выпуклому элементу,  $V$  — к вогнутому. Поскольку локальные элементы формы представляют собой только приближенную характеристику геометрии объекта в целом, найденное начальное положение является только оценочным. Чтобы избежать возможных взаимопересечений, может потребоваться дальнейшее уточнение положения детали с помощью дополнительного сдвига. Направление сдвига определяется углами вогнутого элемента по биссектрисе угла между его сторонами. Тип стыковки определяет, какая из трех пар ребер используется для расчета биссектрисы (рис. 4).

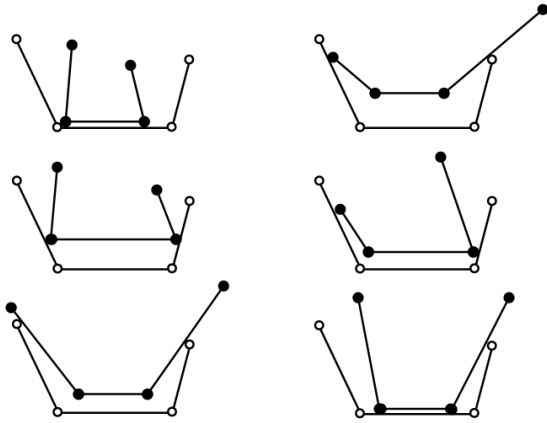
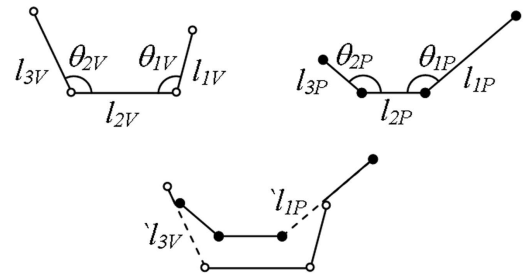


Рис. 2. Возможные типы стыковки в случае центральных базовых ребер.



$$0 = l_{1V} \cos \theta_{1V} - l_{2V} + l_{3V} \cos \theta_{2V} - l_{3P} \cos \theta_{2P} + l_{2P} - l_{1P} \cos \theta_{1P}$$

$$0 = l_{1V} \sin \theta_{1V} + l_{3V} \sin \theta_{2V} - l_{3P} \sin \theta_{2P} + l_{1P} \sin \theta_{1P}$$

$$0 < l_{3V} \leq l_{3P}, 0 < l_{1P} \leq l_{1P}$$

Рис. 3. Пример системы уравнений, определяющей плотное совмещение локальных элементов.

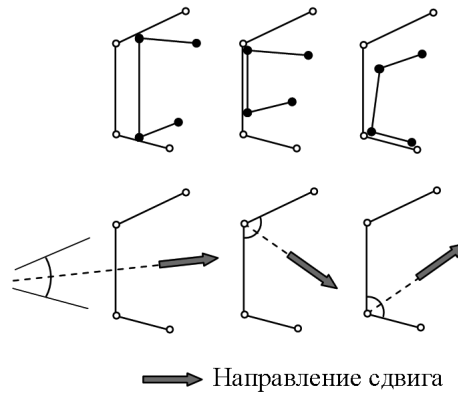


Рис. 4. Три возможных направления сдвига, определяемых углами вогнутого элемента и типом стыковки.

Таким образом, для данной совмещаемой пары локальных элементов формы можно определить существование и параметры корректного варианта размещения. Локальные характеристики формы можно также использовать и для выбора того, какие пары предпочтительнее для совмещения. Для этого необходим быстрый и эффективный в вычислительном плане метод оценки качества совмещения двух элементов, позволяющий сопоставить численную меру или индекс совмещения для каждого возможного варианта совмещения.

Индекс совмещения представляет собой комбинацию трех базовых характеристик степени расхождения между выпуклым и вогнутым элементами, вычисляемых с использованием геометрических параметров элементов, а именно двух углов и длин каждого из ребер. В случае, когда базовым является первое ребро, эти три значения представляют собой:

$$X = |(l_{1V} - l_{1P})/l_{1V}|; \tag{1}$$

$$\beta = |\theta_{1V} - \theta_{1P}|; \tag{2}$$

$$Y = |(l_{2V} - l_{2P} \cdot \cos \beta)/l_{2V}|. \tag{3}$$

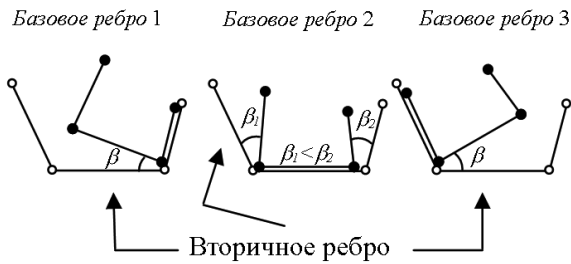


Рис. 5. Угол  $\beta$  и вторичные стороны для трех случаев выбора базовых сторон.

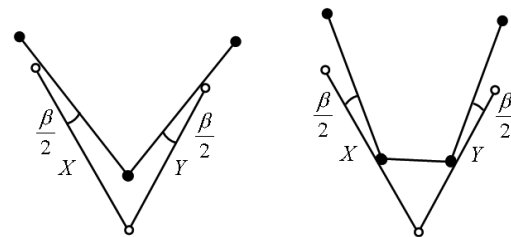


Рис. 6. Совмещение двухреберных локальных элементов и смешанное совмещение.

Здесь  $X$  оценивает нормированную разницу между базовыми ребрами совмещения;  $\beta$  — угловая разность между вторичными сторонами, т. е. сторонами, граничащими с базовыми (рис. 5). При совмещении ребер 1 или 3 вторичным становится центральное ребро, тогда как при совмещении центральных ребер вторичным считается ребро, которое дает меньшее значение угла  $\beta$ . И, наконец,  $Y$  — нормированная разница между проекцией одного вторичного ребра на другое. Полностью индекс совмещения можно записать в виде

$$f = \gamma(X) + \phi(\beta) + \psi(Y). \tag{4}$$

Конкретный вид весовых функций  $\gamma()$ ,  $\phi()$ ,  $\psi()$  должен формулироваться с учетом того, чтобы отражать требуемую относительную важность вклада каждой из переменных. По-видимому, роль угловой переменной  $\beta$  при оценке близости совмещения должна быть наибольшей.

Следует отметить, что совмещение трехреберных локальных элементов формы не является единственно возможным вариантом. Можно также рассматривать совмещение двухреберных элементов друг с другом и совмещение трехреберных элементов с двухреберными (рис. 6). При этом численную оценку плотности стыковки, основанную на использовании соотношения (4), можно применять без существенных модификаций, если под  $X$  и  $Y$  понимать проекции крайних ребер друг на друга, а под  $\beta$  — разность углов между крайними ребрами.

### 3. Алгоритм группировки деталей

Задача объединения, или кластеризации, деталей в группы предполагает решение двух основных проблем. Во-первых, необходимо как можно плотнее состыковать заданную комбинацию деталей, чтобы площадь промежутка между деталями была минимальной. Во-вторых, нужно определить такие комбинации деталей, которые допускают наилучшую плотность стыковки и к тому же имеют хорошую повторяемость, т. е. заданный набор исходных деталей допускает формирование достаточно большого количества одинаковых групп. К счастью, локальные характеристики формы, описанные выше, позволяют заранее оценить качество стыковки разнородных деталей. Причем вычисление этой оценки не требует больших затрат и его можно провести для всех комбинаций стыкуемых элементов.

На первом этапе алгоритма перебираются все возможные варианты стыковки выпуклых элементов с вогнутыми, рассматривается только совмещение двухреберных элементов

с двухреберными и трехреберных с трехреберными. Для каждой пары рассчитывается целевая функция вида

$$f_{i,j} = \xi(U_i, V_j) + \chi(N_{\text{group}}(i, j)/N), \quad (5)$$

где  $\xi(U_i, V_j)$  оценивает качество стыковки вогнутого ( $U_i$ ) и выпуклого ( $V_j$ ) элементов, функция  $\chi()$  оценивает выигрыш от размещения группы деталей как целого объекта в зависимости от того, какую долю составляет количество групп после стыковки  $N_{\text{group}}(i, j)$  относительно полного количества деталей  $N$ . Выбор конкретного вида зависимостей для  $\xi()$  и  $\chi()$  является отдельной задачей. При этом вклад  $\chi()$  должен быть более весомым, поскольку не имеет большого смысла тратить вычислительные ресурсы на группировку деталей, количество которых мало по сравнению с полным числом размещаемых объектов.

Наиболее трудоемким процессом является расчет плотного совмещения двух деталей с учетом требования отсутствия пересечений. На практике невозможно провести его за разумное время для всех возможных комбинаций совмещаемых элементов. Естественным решением представляется упорядочить различные варианты по возрастанию целевой функции (5) и рассмотреть только начальную, наиболее предпочтительную часть списка.

Плотное совмещение локальных элементов формы не гарантирует отсутствия пересечений в остальных частях детали. Для этой цели можно применять уже используемый в разработанной программе “Nesting Intelligent Software” алгоритм расчета минимального сдвига двух контуров, исключая пересечения. Основным входным параметром данного алгоритма, помимо геометрии контуров, является направление сдвига. Неправильный выбор этого направления может привести к ухудшению качества совмещения. В случае совмещения двухреберных элементов предполагается сдвигать контуры по направлению биссектрисы угла. В случае трехреберных элементов направление зависит от того, какое из трех ребер выбирается для совмещения, это направление определяется биссектрисой угла раствора либо среднего и крайнего ребер, либо двух крайних ребер (см. рис. 4). Наиболее высокого качества совмещения можно достичь, выбирая направление на основе анализа области пересечения контуров, однако это достаточно трудоемкая задача, решение которой представляется неоправданным.

В работе [10] локальные характеристики формы применялись для определения позиций и ориентаций деталей при размещении на незанятой части заготовки. Так как она является внутренней областью контура, определяющего границу заготовки, наличие вогнутых элементов в пластине гарантировано. При объединении деталей в группы возможно возникновение ситуации, когда все детали и, следовательно, все их элементы формы являются выпуклыми. Очевидно, использование описанного выше критерия стыковки выпуклых элементов с вогнутыми становится невозможным, и необходимо определить какой-то дополнительный критерий качества стыковки. Можно использовать подход, предложенный в [13], где стыковка основывается на совмещении отдельных ребер объектов. Предпочтительно в первую очередь совмещать самые длинные ребра с мало отличающейся друг от друга длиной. Перебор совмещаемых пар можно организовать полностью аналогично тому, как это было сделано при переборе выпуклых и вогнутых пар: сначала отсортировать варианты по возрастанию целевой функции, затем рассчитать точное совмещение части наилучших вариантов. Существует и другой подход. Можно рассматривать совмещение по отдельным ребрам в едином цикле с выпукло-вогнутыми парами. Для этого необходимо переопределить целевую функцию  $\xi()$ , рассматривая совмещение отдельных ребер как специальный случай совмещения трехреберных элементов, когда оба они выпуклые. Основная трудность заключается в том, что не ясно, как сравнивать качество стыковки отдельных сторон и угловых элементов. В первом случае определяющей переменной яв-



ляется длина одной стороны, во втором — определяющие переменные — это длины двух сторон и угол.

Только после того как произведен расчет точной стыковки наиболее перспективных комбинаций деталей, можно переходить к окончательной оценке качества их совмещения. По ряду причин наиболее привлекательным критерием для такой оценки выглядит отношение суммарной площади группированных деталей  $S(i)$  к площади выпуклой оболочки кластера  $S_{CH}(i, j)$ :

$$p(i, j) = 1 - \frac{S(i) + S(j)}{S_{CH}(i, j)}. \quad (6)$$

Для построения выпуклой оболочки можно использовать результаты [14, 15].

Необходимо также учесть, что различные объединения деталей могут конкурировать друг с другом, т. е. создание одного из типов объединений может исключать образование других или уменьшать их количество. В качестве критерия, определяющего выбор наилучших объединений, можно использовать величину, имеющую смысл полной площади отходов, связанных с объединением деталей  $i$  и  $j$ :

$$S_W = N_{\text{group}}(i, j) \cdot p(i, j) \cdot S_{CH}(i, j). \quad (7)$$

Опыт использования программы “Nesting Intelligent Software” показывает, что имеется тенденция к образованию более плотного размещения в том случае, если форма размещаемых деталей близка к прямоугольной. Критерием близости к прямоугольной форме может выступать как близость площади фигуры и площади ее минимального окаймляющего прямоугольника (ОП, англ: BR = Boundary Rectangle), так и наличие образующих граней, перпендикулярных или параллельных друг другу. Причина этого явления связана с используемой стратегией одиночно-последовательного размещения “слева направо, снизу вверх”. Представляется выгодным размещать вновь образованные группы в такой ориентации, чтобы стороны его ОП были направлены вдоль координатных осей. Естественно, это можно сделать только в том случае, если специфика задачи не накладывает ограничений на допустимые ориентации деталей. Определение оптимальной ориентации группы можно решать как задачу поиска минимума функции одной угловой переменной:

$$f(\phi) = S_{BR}(P(i, j), \phi) - S(P(i, j)), \quad (8)$$

где  $S_{BR}(\cdot, \phi)$  — площадь ОП фигуры в зависимости от угла поворота  $\phi$ ;  $P(i, j)$  — группа из нескольких деталей. При этом важно аккуратно учесть возможное наличие нескольких минимумов у функции (8). Полезным может оказаться использование вместо самого кластера  $P(i, j)$  его выпуклой оболочки  $CH(P)$ .

## Заключение

Предложен эмпирический алгоритм поиска наилучшей ориентации при объединении деталей в группы. Метод основан на использовании локального анализа геометрии ограничивающих контуров кластеризуемых двумерных объектов, что позволяет определить как наиболее перспективные комбинации группируемых деталей, так и их примерное положение, которое затем уточняется в ходе работы алгоритма по устранению пересечений. Поскольку объединение деталей в группы происходит на стадии подготовки расчета, можно

провести достаточно детальную оценку геометрии деталей без существенного замедления всего процесса автоматического построения плана раскроя.

## Список литературы

- [1] СТОЯН Ю.Г., ЯКОВЛЕВ С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
- [2] СТОЯН Ю.Г., ГИЛЬ Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. Киев: Наук. думка, 1976. 247 с.
- [3] МУКНАСНЕВА Е.А., ZALGALLER V.A. Linear programming cutting problems // Intern. J. of Software Engineering and Knowledge Engineering. 1993. Vol. 3, N 4. P. 463–476.
- [4] МУХАЧЕВА Э.А., ВЕРХОТУРОВ М.А., МАРТЫНОВ В.В. Модели и методы расчета раскроя-упаковки геометрических объектов. Уфа: УГАТУ, 1999. 217 с.
- [5] ВАЛЕЕВА А.Ф. Алгоритм прямоугольной упаковки и его применение к задаче фигурного раскроя // Тр. Междунар. конф. по прикладной и индустриальной математике. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994. Т. 2. С. 47–57.
- [6] МУХАЧЕВА Э.А., ВАЛЕЕВА А.Ф. Метод динамического перебора в задаче двумерной упаковки // Информационные технологии. 2000. № 5. С. 30–37.
- [7] RAMESH BABU A., RAMESH BABU N. A generic approach for nesting of 2-D parts in 2-D sheets using genetic and heuristic algorithms // Computer-Aided Design. 2001. Vol. 33. P. 879–891.
- [8] СТОЯН Ю.Г., СОКОЛОВСКИЙ В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. Киев: Наук. думка, 1980. 206 с.
- [9] HERAGU S.S., ALFA A.S. Experimental analysis of simulated annealing based algorithms for the layout problem // Europ. J. Operational Res. 1992. Vol. 57. P. 190–202.
- [10] LAMOUSIN H., WAGGENSPACK W. Nesting of two-dimensional irregular parts using a shape reasoning heuristic // Computer-Aided Design. 1997. Vol. 29, N. 3. P. 221–238.
- [11] ФРОЛОВСКИЙ В.Д. Целочисленная аппроксимация и оптимальное группирование геометрических объектов в задачах размещения // Науч. вестник НГТУ. 2000. № 1(8). С. 37–46.
- [12] ФРОЛОВСКИЙ В.Д. Оптимальное группирование геометрических объектов при проектировании карт раскроя материалов // Программные продукты и системы. 2000. № 3. С. 47–48.
- [13] DAGLI C.H., TOTOGLU M.Y. A computer package for solving cutting stock problems // 7th Intern. Conf. on Production Research, Windsor, Ontario, Canada. 1983. Vol. 1. P. 480–486.
- [14] ПРЕПАРАТА Ф., ШЕЙМОС М. Вычислительная геометрия: Введение: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 472 с.
- [15] СКВОРЦОВ А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002. 128 с.

*Поступила в редакцию 27 сентября 2005 г.,  
в переработанном виде — 21 декабря 2005 г.*