

МУЛЬТИТРИАНГУЛЯЦИЯ

Мирза Н.С., Скворцов А.В., Соболев В.А.

Томский государственный университет

Рассматривается метод получения поверхности переменного разрешения на основе мультитриангуляции, который позволяет быстро визуализировать детализованные поверхности.

Введение

Задача обработки поверхностей (визуализация, анализ и т.п.) актуальна для геоинформационных систем, систем автоматизированного проектирования, систем трёхмерного моделирования, симуляторов и пр. Чаще всего для построения цифровой модели поверхности используется *триангуляция* – планарный граф, все конечные грани которого являются треугольниками [1]. На вход алгоритму построения триангуляции поступают точки с трёхмерными координатами поверхности. На реальных проектах часто приходится иметь дело с очень детализованными триангуляциями, т.е. построенных по огромному массиву данных на входе. Однако чтобы работать с триангуляцией с миллионами вершин требуется мощное аппаратное обеспечение. Поэтому разработаны специальные алгоритмы построения поверхности с заданным уровнем детализации (согласно некоторому критерию), которые позволяют значительно увеличить скорость работы с большими поверхностями при хорошем качестве отрисовки.

1. Упрощение триангуляции

Создание структур данных, необходимых для построения поверхности переменного разрешения, основано на процессе упрощения триангуляции.

Определение. Пусть имеется триангуляция T , содержащая N узлов, каждый из которых представлен набором из трёх координат (x, y, z) , где $z = h(x, y)$ есть высота в заданной плановыми координатами точке поверхности. В задаче построения упрощающей триангуляции (задаче генерализации) требуется найти такую триангуляцию t , что [1]:

- она содержит заданное количество узлов $n = |t| < N$ и имеет минимальное отклонение d от T : $d(T, t) = \min_{\tau} d(T, \tau), |\tau| = n$ (*задача, управляемая геометрией*);
- она имеет отклонение d по вертикали от T не более чем на заданную величину ε и имеет минимальное количество узлов $n(t) = \min_{\tau} n(\tau), d(T, \tau) < \varepsilon$ (*задача, управляемая ошибкой*).

Задача упрощения триангуляции в обоих вариантах является NP-сложной, поэтому на практике используются приближённые алгоритмы [1], которые используют некоторый локальный критерий качества упрощённой модели, оптимизируя который удаётся улучшить соответствующий глобальный критерий.

Как правило, в качестве локального критерия выступает критерий минимизации расстояния от удаляемой вершины (ребра, треугольника) исходной модели до поверхности упрощённой модели.

Все существующие методы упрощения триангуляции основаны на одной из двух стратегий:

1. Стратегия «сверху вниз» начинает работу с максимально упрощённой триангуляцией. Далее постепенно в триангуляцию добавляются некоторые вершины в порядке согласно некоторому критерию до тех пор, пока не будет достигнуто нужное число вершин или величина ошибки будет удовлетворительной [2].
2. Стратегия «снизу вверх» начинает работу с самой детализированной триангуляции, к которой постепенно применяются некоторые *локальные модификации* – операции, заменяющие некоторую маленькую группу смежных треугольников на другую, покрывающую ту же область (рис 1.1).

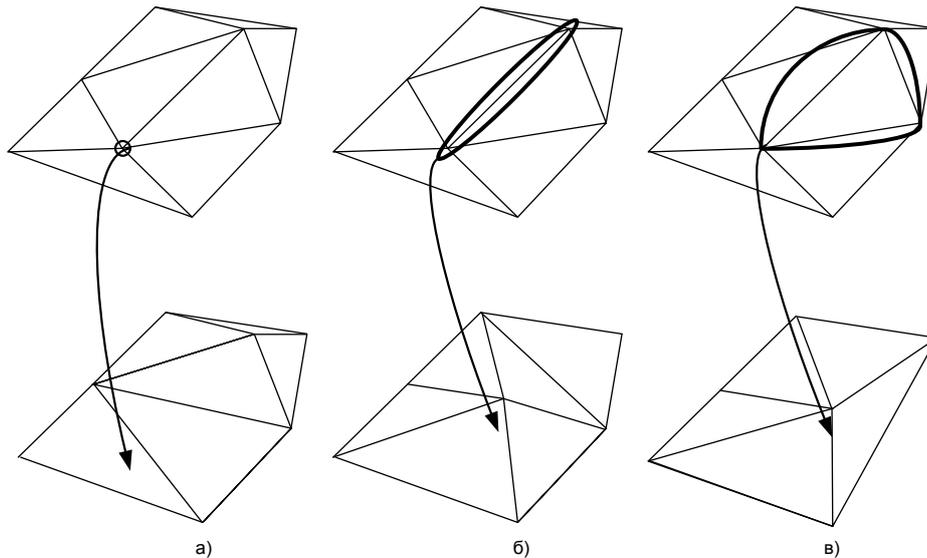


Рис. 1.1 – Локальные модификации триангуляции: а) – удаление узла; б) – коллапс ребра; в) – коллапс треугольника

Преимуществом стратегии «сверху вниз» является то, что она основана исключительно на операции вставки узла в триангуляцию, которая используется при построении триангуляции, в отличие от стратегии «снизу вверх», основанная на операции удаления узла, которая достаточно сложна и должна быть реализована в дополнение к обычному алгоритму построения триангуляции.

Однако именно стратегия «снизу вверх» параллельно с упрощением позволяет построить особую структуру *мультитриангуляцию*, которая используется для получения поверхности переменного разрешения и будет рассмотрена ниже.

Как правило, на практике чаще всего пользуются наиболее простым алгоритмом упрощения – итеративным процессом, который можно разбить на следующие этапы:

1. Классификация вершин.
2. Вычисление ошибки, вызванной применением локальных модификаций.
3. Выбор локальной модификации, вызывающей минимальную ошибку.
4. Применение локальной модификации с соответствующим локальным перестроением триангуляции.

Для классификации вершин поверхности введём следующее понятие.

Определение. Если угол, образованный плоскостями двух смежных треугольников больше некоторого заданного угла, то считается, что данные треугольники образуют *внутренний край* поверхности.

Каждая вершина принадлежит к одному из следующих классов [3]:

1. *Простая вершина* – вершина, окружённая полным замкнутым циклом из треугольников (рис. 1.2,а).
2. *Граничная вершина* – вершина, которая лежит на границе поверхности, т.е. окружена не полным циклом из треугольников (рис. 1.2,б).
3. *Вершина внутреннего края* – простая вершина, используемая в образовании двух внутренних краёв поверхности (рис. 1.2,в).
4. *Угловая вершина* – простая вершина, используемая в образовании одного, трёх или более внутренних углов поверхности (рис. 1.2,г).

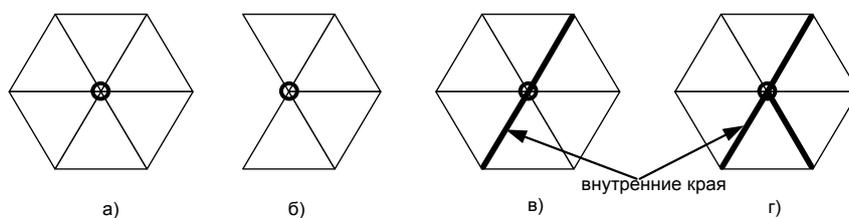


Рис. 1.2 – Классификация узлов триангуляции: а) – простая вершина; б) – граничная вершина; в) – вершина внутреннего края; г) – угловая вершина

Вершины третьего и четвёртого типа не удаляются, а для удаления вершин второго типа необходимо учитывать неполноту цикла окружающих треугольников.

Для расчёта ошибки, вызванной той или иной локальной модификацией, как правило, используется величина отклонения (в заданной метрике [4, 5]) между исходной и упрощённой поверхностью, которое возникнет, если применить локальное преобразование.

2. Мультитриангуляция

Мультитриангуляцией (МТ) называют особую структуру, представляющую собой набор фрагментов триангуляций, образующих ориентированный граф без циклов [6].

Мультитриангуляция позволяет представлять поверхность с различной степенью детализации в зависимости от предложенного критерия. Поэтому в зоне, представляющей наибольший интерес с позиции критерия, детализация поверхности максимальна, а в оставшихся областях понижена. Обычно зона интереса является небольшой по сравнению со всей поверхностью, поэтому за счёт снижения разрешения в большей части поверхности удаётся достичь нужного количества примитивов без значительной потери качества. Более того, структура мультитриангуляции предоставляет эффективный способ перестроения поверхности в случае

динамической смены критерия, что делает возможным интерактивную визуализацию в реальном режиме времени.

На структуру мультитриангуляции обычно накладывается ряд ограничений, позволяющих достичь наибольшей эффективности [6]:

- *непрерывность поверхности*: не должно быть разрывов или резких скачков при переходе от области одного разрешения к области другого разрешения;
- *непрерывность разрешения*: не должно быть резких изменений при переходе от одного уровня детализации к другому близкому уровню;
- *оптимальность*: число примитивов для каждого заданного уровня детализации должно быть минимальным;
- *эффективность*: извлечение треугольников нужного уровня детализации из мультитриангуляции должно осуществляться в реальном времени.

Для формального определения МТ необходимо ввести ряд понятий.

Определение. Пусть заданы две триангуляции T и T_i такие, что T_i занимает область меньшую, нежели T . Тогда T и T_i называются *совместимыми* [6], если в T существует подмножество треугольников T' , занимающих в точности ту же область, что и T_i и при этом T' является триангуляцией. В таком случае, T_i называется *фрагментом* (относительно T), а T' – *покрываемой областью* T_i .

Определение. T_i называется *минимально совместимым* с T , если в T_i нет подтриангуляции совместимой с T .

Определение. *Локальной модификацией* T через фрагмент T_i (рис. 2.1) является операция замены треугольников T' треугольниками T_i и обозначается $T \oplus T_i$.

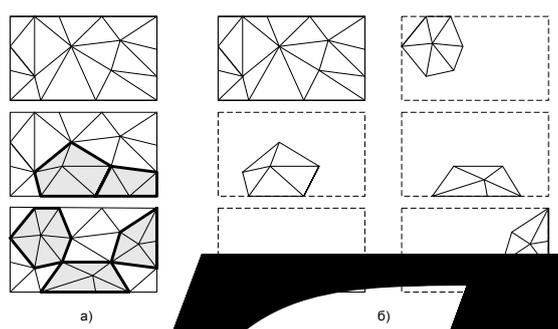


Рис. 2.1 – Структура МТ: а) комбинация триангуляций возрастающего разрешения; б) последовательность локальных модификаций

Определение. Если все T_i совместимы с T , то последовательность преобразований $t = (T_0, \dots, T_n)$ называется *совместимой последовательностью триангуляций*.

Определение. В терминах, определённых выше, *мультитриангуляция* – направленный граф без циклов (рис. 2.2), вершинами которого являются элементы совместимой последовательности триангуляций [6].

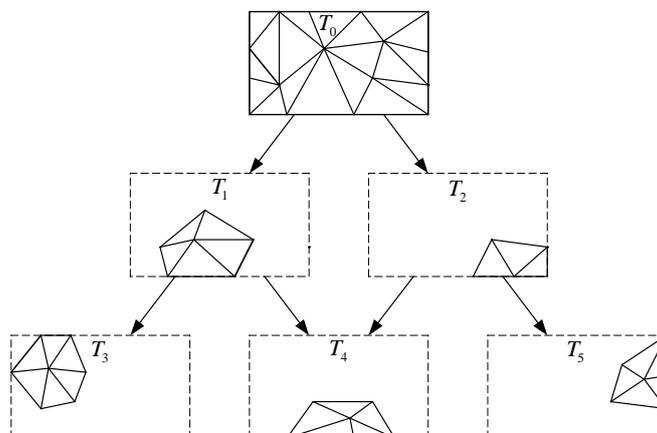


Рисунок 2.2 – Граф мультитриангуляции

Исходя из определения для МТ обладает следующими свойствами [6]:

- *зависимость:* из T_i в T_j существует ребро тогда и только тогда, когда некоторые треугольники T_i принадлежат дну T_j ;
- *минимальность:* каждый фрагмент T_i минимально совместим с покрываемой областью;
- *устойчивость ребра:* если ребро e является общим для фрагментов T_i и T_j , при этом T_i - потомок T_j , то e является ребром покрываемой области T_i ;
- *неизбыточность:* нет повторяющихся *треугольников*, т.е. каждый треугольник принадлежит ровно одному фрагменту.

Для дальнейших рассуждений введём ещё ряд важных понятий, связанных с МТ.

Определение. *Корнем* графа является полная триангуляция (самая примитивная), а *стоком* – самая примитивная (полная), в зависимости от направления локальных модификаций.

Определение. *Разрезом* мультитриангуляции называется набор дуг графа, который содержит по одной дуге для каждого пути от корня к листу.

Набор вершин, которые можно достичь, не пересекая дуг разреза, образуют совместимую последовательность преобразований, применяя которые можно получить один из вариантов поверхности переменного разрешения.

3. Построение мультитриангуляции

Рассмотрим алгоритм построения мультитриангуляции, описанный в [7]. Согласно [8, 9], построенная этим алгоритмом МТ обладает достаточно хорошими для практики характеристиками (по размеру, максимальной длине и пр.).

Алгоритм построения мультитриангуляции.

Структуры данных [6]:

1. *Список фрагментов (DT)*: каждый фрагмент содержит список составляющих его треугольников и список указателей на треугольники покрываемой части;
2. *Список треугольников*: каждый треугольник содержит ссылки на три образующих его узла, ссылки на фрагмент, где он содержится (верхний фрагмент) и на фрагмент, который содержит его в покрываемой части (нижний фрагмент);
3. *Список вершин (V)*: каждая вершина содержит необходимый набор геометрических данных;
4. *Корень мультитриангуляции*: содержит список треугольников, которые его составляют;

Входные данные: полная триангуляция.

Выходные данные: корректная структура МТ.

Структура алгоритма:

```
i = 0; Vi = V; DTi = DT(V);
```

```
while | Vi | ≥ c | Vfixed |
```

```
{
```

```
    Vi+1 = Vi; DTi+1 = DTi;
```

Определяется множество I_i , состоящее из максимального числа несмежных вершин V_i / V_{fixed} , где каждая вершина имеет степень не больше d .

цикл по всем вершинам $v \in I_i$

```
{
```

```
    Удалить вершину  $v$  из  $V_{i+1}$ ;
```

```
    Удалить  $v$ , все смежные рёбра и треугольники из  $DT_{i+1}$ ;
```

```
    Заполнить образовавшуюся дырку, используя триангуляцию Делоне.
```

```
    Добавить новые рёбра и треугольники в  $DT_{i+1}$ ;
```

```
    Связать треугольник из  $DT_i$ , смежный с  $v$ , и новым треугольником, если их покрываемые области пересекаются.
```

```
}
```

```
    i = i + 1
```

```
}
```

Конец алгоритма.

В алгоритме использовано множество вершин V_{fixed} , которое определяется пользователем и представляет собой множество «важных» вершин, удалять которые нельзя. Такими вершинами являются вершины, определяющие рельеф поверхности (пики, впадины и т.п.).

Константы c и d определяются эмпирически [7].

Описанный алгоритм основан на удалении точек из триангуляции Делоне. Важной особенностью данного алгоритма является факт, изложенный в следующей теореме, доказанной в [7]:

Теорема. При удалении вершины из триангуляции Делоне перестроение триангуляции произойдёт только внутри области, образованной после удаления (рис. 3.3).

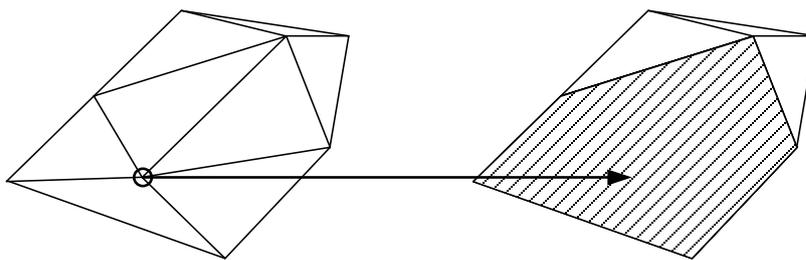


Рис. 3.3 – Область, образованная после удаления узла в триангуляции Делоне

Из теоремы следует, что граф МТ не сильно «запутан», т.е. при детализации одного треугольника не придётся детализировать очень много лишних треугольников. Более того, факт удаления на каждом этапе только несмежных вершин тоже приводит к устранению «запутанности» графа МТ и снижает его высоту, а, следовательно, увеличивает скорость работы алгоритма выборки треугольников для визуализации поверхности.

4. Извлечение поверхности с заданным уровнем детализации

В основе алгоритма извлечения лежит критерий, по которому определяется, достаточно ли разрешение имеет треугольник. Например, для трёхмерной визуализации данных таким критерием может служить близость треугольника к камере: чем ближе, тем больше должно быть его разрешение.

Формально критерий описывается некоторой функцией $c(t)$ [10], которая возвращает истину, если разрешение треугольника удовлетворяет критерию.

Алгоритм извлечения списка треугольников из мультитриангуляции [6].

Структуры данных:

1. Очередь активных фрагментов;
2. Структура МТ, аналогичная алгоритму построения МТ, описанному выше;
3. Результирующий список треугольников.

Входные данные: корректная структура МТ.

Выходные данные: список треугольников, подлежащих выводу на экран.

Описание алгоритма:

Алгоритм извлечения работает от корня к стволу.

Помещаем в очередь активных фрагментов корень. Устанавливаем флаг корня $FrChecked:=true$.

В цикле, пока очередь активных фрагментов не пуста, извлекаем фрагмент $f1$.

Для каждого треугольника, принадлежащего покрываемой области $f1$, проверяем флаг: если $TrChecked = false$, то устанавливаем $TrChecked:=true$; $f2$ присваиваем значение верхнего фрагмента и помечаем для него $FrChecked:=true$.

Для каждого треугольника t из f_1 , если $TrChecked = false$ и $c(t) = true$, то помещаем его в выходной список, иначе, если $c(t) = false$, то f_2 присваиваем значение нижнего фрагмента t (если такой есть) и устанавливаем $Checked:=true$ для f_1 и t .

Удаляем из выходного списка треугольников все треугольники, у которых $Checked = true$.

Трудоёмкость данного алгоритма составляет $O(N)$ [6].

Заключение

Несмотря на то, что мультитриангуляция предоставляет возможность быстрой визуализации больших поверхностей, однако классический подход, описанный в данной статье, к построению и обработке МТ имеет ряд недостатков («запутанность» графа МТ, качество работы алгоритма извлечения треугольников из МТ и др.), препятствующий более широкому применению данной структуры. Поэтому дальнейшее исследование МТ должно быть направлено на устранение недостатков и повышение скорости работы алгоритмов, основанных на МТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.
2. Heckbert P., Garland M. Survey of polygonal surface simplification // SISGRAPH. 1997. Course 25.
3. Schroeder W., Zarge J., Lorensen W. Decimation of triangle meshes // Computer Graphics. 1992. Vol. 26. P. 65–70.
4. Garland M., Heckbert P. Surface simplification using quadric error metrics // Computer Graphics Proceedings. 1997.
5. Klein R., Liebich G., Straber W. Mesh reduction with error control // ACM Visualization Proceedings. 1996. P. 311–318.
6. Puppo E. Variable resolution triangulations // Computational Geometry. 1998. Vol. 11. P. 219–238.
7. De Berg M., Dobrindt K. On levels of detail in terrains. Proceedings of the eleventh annual symposium on Computational geometry, p.426-427, June 05-07, 1995, Vancouver, British Columbia, Canada
8. De Floriani L., Magillo P., Puppo E. Building and traversing a surface at variable resolution // Proc. Conf. On Visualization '97. 1997. 18-24.
9. De Floriani L., Magillo P., Puppo E., Efficient implementation of multi-triangulations // Proc. Conf. On Visualization '98. Research Triangle Park, North Carolina, United States. 1998, P. 43-50.
10. Cignoni P., R., Puppo, E., Scopigno R. Representation and visualization of terrain surfaces at variable resolution. // Scientific Visualization. 1995. 50-68.